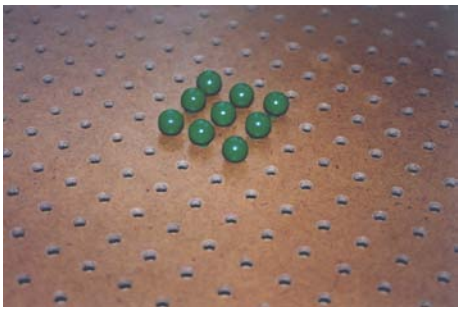
Dat akelige rekenen

Mario M. Montessori

Een herdruk uit ‘AMI Communications’ © AMI 1960
Gepubliceerd met toestemming; als eerbetoon aan Kit Steenberghe

Is rekenen eigenlijk wel zo akelig? Lees dit eens. Het is uit een verslag van een ervaren Montessori leidster in een Amsterdamse Montessorischool, Mevrouw C. Steenberghe, over een aantal gebeurtenissen die in haar klas plaatsvonden.



De kinderen hadden lesjes gehad over machtsverheffen en daarna over worteltrekken. Een aantal kinderen had de tweede macht van getallen berekend met behulp van het knopjesbord. Dit is een bord met rijen gaatjes waarin knopjes gestoken kunnen worden. De afstand tussen de gaatjes in een rij en tussen de rijen onderling is gelijk. Je kunt ‘vierkanten’ van getallen maken door verticaal het aantal eenheden waaruit het getal bestaat in het bord te prikken en op dezelfde manier horizontale rijen in te steken. Het getal drie bestaat zo uit drie rijen van drie knopjes, die een vierkant van negen knopjes vormen.

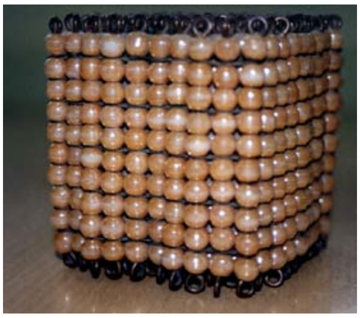
Op deze manier krijgen kinderen een visuele indruk en een goed begrip van wat verheffen tot de tweede macht is: $3 \times 3 = 9 = 3^2$.

Nadat ze met het knopjesbord gewerkt hadden, zegt Mevrouw Steenberghe, begon een groep kinderen abstract de tweede macht (het vierkant) te berekenen van de getallen tussen 1 en 25. Ze kwamen tot de volgende ontdekking: Als je –beginnend bij het laatste kwadraat – de waarde van de vierkanten van elkaar aftrekt, dan krijg je een rij van natuurlijke oneven getallen. En als je die weer op dezelfde manier van elkaar aftrekt is de uitkomst altijd 2.

1	4	9	16	25	36	…………	625
(1)	3	5	7	9	11	←	
2	2	2	2	2		←	

Dat was verbazingwekkend. Deze regelmatigheid verraste de kinderen en ze maakten er gebruik van om hun werk te controleren. Als er in de tweede rij een verschil zat waar geen 2 uitkwam dan wisten ze dat ze ergens een fout gemaakt hadden en ze begonnen opnieuw.

Als je ooit een kind geweest bent waarvan de belangstelling voor iets gewekt is, dan weet je wat je verwachten kunt. De kinderen wilden nu weten wat er gebeuren zou



als je getallen in de derde macht zou nemen. In haar verslag zegt Mevrouw Steenberghe dat de kinderen al bekend waren met de derde macht door werk dat ze eerder al gedaan hadden met de kubus met duizend kralen van het gouden materiaal en met het metriek stelsel. Tot de derde macht verheffen betekende dat je een getal met zichzelf vermenigvuldigde en dat dan nog een keer deed. 3 x 3 x 3 = 9 x 3 = 27 = 3^3

Ze gingen met veel enthousiasme en verwachtingsvol aan het werk. Wat zou er gebeuren? Opnieuw berekende ze abstract de derde macht van de getallen van 1 – 25.

De getallen die ze vonden waren natuurlijk veel groter. Het vermenigvuldigen nam veel meer tijd in beslag. Maar dat vonden ze geen bezwaar. De groep bestond uit meerdere kinderen en ze verdeelden de taken. Tenslotte waren de berekeningen klaar en het aftrekken begon. Ze ontdekten dat ze om bij het eindresultaat te komen, een rij met dezelfde getallen, er drie keer moest worden afgetrokken in plaats van twee keer. Betekende dat iets?

1 8 27 64 125 15625

$\longleftarrow$

7 19 37 61

$\longleftarrow$

12 18 24

$\longleftarrow$

6 6

Laten we eens gaan onderzoeken hoe dat gaat bij de vierde en vijfde macht. Hoeveel keer moeten we dan aftrekken? Wat voor getal krijgen we dan? Zou het een veelvoud van 6 zijn? Ze gingen aan de slag. Hun enthousiasme was een golf van activiteit geworden en de kinderen wilden van geen wijken weten.

“Ik kon die activiteitsgolf niet stoppen,” schrijft Mevrouw Steenberghe “en steeds meer kinderen die met machten gewerkt hadden sloten zich bij het groepje aan.”

Opnieuw berekenden de kinderen de getallen van 1 – 25. Nu in de vierde macht.

1 16 81 256 625 1296............ 390625

$\longleftarrow$

15 65 175 369 671

$\longleftarrow$

50 110 194 302

$\longleftarrow$

60 84 108

$\longleftarrow$

24 24

Ze moesten vier keer aftrekken om bij 24 te komen. Een 24 was 6 x 4. Voor de tweede macht moesten ze twee keer aftrekken, voor de derde macht drie keer en voor de vierde macht vier keer. En het overblijvende getal voor de tweede macht was 2, voor de derde macht 6 en dat is 2 x 3. Voor de vierde macht vonden ze 24 en dat is 6 x 4.

Het werd nu echt boeiend. De laatste getallenrij van de tweede macht was 2, van de derde macht 2 x 3 = 6 en van de vierde macht 6 x 4 = 24. De laatste getallenrij werd dus steeds vermenigvuldigd met de exponent van de daarop volgende macht. Zou nu de laatste getallenrij voor de vijfde macht 24 x 5 zijn?

En zou er vijf keer afgetrokken moeten worden om aan de laatste getallenrij te komen?

“Laten we niet bij de zevende macht stoppen,” besloten de kinderen, “laten we doorgaan tot aan de vijfentwintigste macht van de getallen van 1 – 25. Maar tegen de tijd dat ze de berekeningen voor de vijfde, de zesde en de zevende macht gemaakt hadden, waren de getallen zo groot geworden dat er besloten werd om bij de tiende macht te stoppen. Dat zou ver genoeg zijn om te kunnen vaststellen of het patroon van de verschillen tussen de laatste getallenrijen zich zou voortzetten. Voor de vijfde macht was dit zeker het geval:

1 32 243 1024 3125 7776 16807 32768 9765625

31 211 781 2101 4651 9031 15961 ←

180 570 1320 2550 4380 6930 ←

390 750 1230 1830 2550 ←

360 480 600 720 ←

120 120 120 ←

Ze moesten vijf keer aftrekken en de laatste getallenrij was 24 x 5

Hoe zal ik verder gaan? Het beste is om verder te citeren uit het welsprekende en eenvoudig geschreven rapport van Mevrouw Steenberghe:

“ .... er was nog nooit zo veel gerekend in de groep als in die tijd; nog nooit hadden de kinderen zulke hoge eisen aan zichzelf gesteld wat betreft nauwkeurigheid, want de kleinste fout verstoorde de regelmaat van het patroon dat leidde naar de laatste rij van gelijke getallen. Het was interessant om op te merken dat als er een fout gemaakt was de kinderen zelf bedachten dat het getal op die plaats niet het juiste kon zijn.

Dus begonnen ze opnieuw en gingen door tot ze het goede getal hadden berekend. Nadat ze de vierde macht gedaan hadden herkenden ze het patroon en konden ze uitrekenen wat de uitkomsten op de laatste getallenrij zouden worden.

tweede macht		Derde macht		vierde macht		vijfde macht		zesde macht
2	x 3	6	x 4	24	x 5	120	x 6	720

Ze waren heel enthousiast als hun rekenwerk de voorspelling bevestigde.”

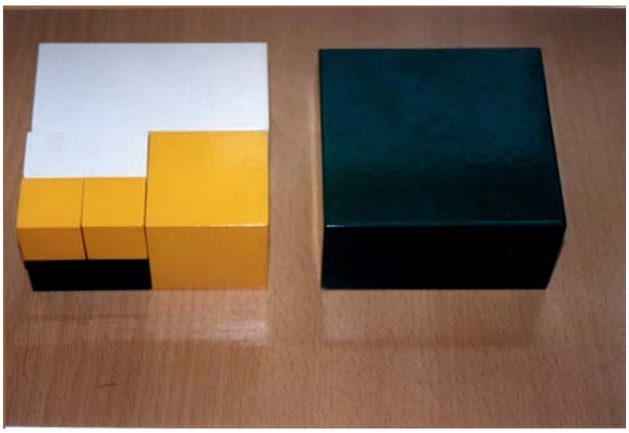
“ Daarna werd de doos met de opeenvolgende machten van twee een geliefd werk-je.”

Een algemeen misverstand, dat zelfs bij wiskundigen heerst, is dat je – omdat geen enkel voorwerp meer dan drie afmetingen kan hebben – een formule als $(a + b)^4$ en eigenlijk alle vierde machten niet concreet kunt voorstellen. Hoewel Einstein aantoonde dat de vierde macht bestaat en dat ermee gerekend kan worden, zou hij niet concreet voorgesteld kunnen worden. En zelfs Einstein heeft niet geprobeerd om aan te tonen dat er een vijfde macht en een zesde macht bestaan als afmeting. Hier ontstaat de verwarring: duiden vierde, vijfde en zesde macht op daarmee corresponde-rende afmetingen?

Dat is niet het geval. In een vermenigvuldiging wordt een hoeveelheid een aantal malen neergelegd. De vermenigvuldiger geeft aan hoeveel keer de hoeveelheid neergelegd wordt; het is geen afmeting. Als we dus a^3 hebben voorgesteld door een kubus met a als ribbe, dan nemen we om a^4 te krijgen het aantal a aan kubussen. Op dezelfde manier is $a^3 \times a^2$ zoveel keer kubussen van a^3 als de hoeveelheid a^2 aangeeft.

Met het Montessori materiaal kan dit gedemonstreerd worden. In sommige kisten zitten kubussen en prisma’s waarmee a^3 ; a^4 ; a^5 ; a^6 ; a^7 ; a^8 en a^9 kan worden voorgesteld. In andere kisten zitten verschillende soorten blokjes die samen $(a + b)^4$ en $(a + b)^5$ voorstellen. En dan is er nog een kist om $(a + b + c)^3$ voor te stellen en een doos waarin deze formule wordt toegepast op het tientallig stelsel.

***



In de eerste kist (het geliefde werkje in de groep van Mevrouw Steenberghe) wordt a^3 voorgesteld door een kubus met de ribbe 2. Je zou dus kunnen zeggen dat die 2^3 voorstelt.

Als je twee van die kubussen naast elkaar legt dan wordt dat $2^3 \times 2$. Dat is 2^4
Het is een prisma met de afmetingen 2 x 2 x 4

Als je twee van deze prisma’s van 2^4 elkaar legt, dan ontstaat er een vierkant prisma met de afmetingen 4 x 4 x 2. Dat prisma stelt dan 2^5 voor.

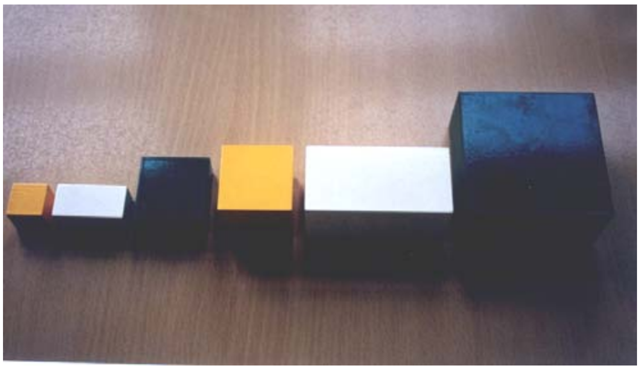
Als je op deze manier verder gaat dan wordt a^7 een langwerpig prisma dat in vorm gelijk is aan dat van a^4.

En a^8 wordt een vierkant prisma dat in vorm gelijk is aan dat van a^5

En a^9 is weer een kubus.

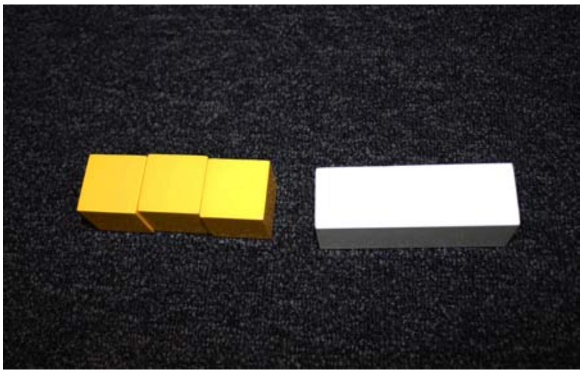
Ook hier ontstaat een tot de verbeelding sprekende regelmaat. Om die te benadrukken hebben alle blokken met dezelfde vorm dezelfde kleur gekregen.

kubus	geel
langwerpig prisma	wit
vierkant prisma	groen

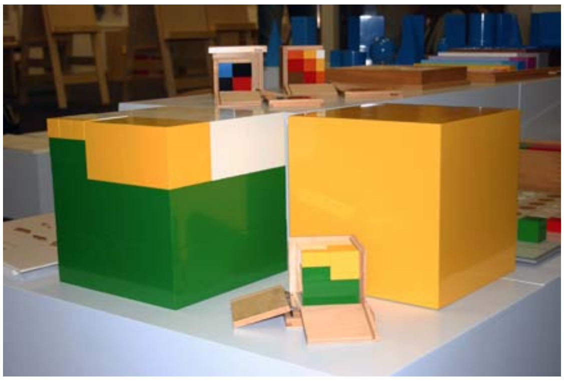


De kinderen in de groep van Mevrouw Steenberghe werkten niet alleen met het materiaal maar ze tekenden de kubussen en prisma's ook na op ruitjespapier. En omdat de natuur van kinderen dezelfde is, herhaalde zich hier hetzelfde verschijnsel dat hierboven bij de machten al beschreven werd. De kinderen vroegen zich af wat er zou gebeuren als ze een kubus met a=3 als uitgangspunt zouden nemen. “Je ergens van bewust zijn,” zegt Dr. Montessori, “is het begin van een intense activiteit, die tot vooruitgang leidt.”

De kinderen begonnen met a^3 op basis van een kubus met een ribbe van 3 cm. Om a^4 te maken hadden ze nu niet twee maar drie kubussen a^3 nodig. Ze tekenden alles op schaal en ze waren onder de indruk van de terugkerende regelmaat van vorm en kleur.



De groep splitste zich nu. Een gedeelte ging verder met de macht a=2 en tekende a^9 tot en met a^{15}. Een ander deel ging verder met de macht a = 3 . Ze combineerden de vormen op verschillende manieren zodat ieder kind een andere tekening te maken kreeg. [1]



a=2 in kleine kistje. a=3 staat eromheen

De voorstelling in materiaal van de tweeterm (binoom) en de drieterm (trinoom) leidde ook tot een intense en plezierige activiteit. Als we a = 2 cm ; b = 3 cm en c = 4 cm maken en de kubussen van deze waarden de kleuren rood ; geel en blauw dan bestaat de kubus van de tweeterm uit negen stukken en die van de drieterm uit 27. De prisma's die a^2b voorstellen hebben twee uiteinden met vierkanten van de waarde a, die dus rood van kleur zijn. De rechthoekige oppervlakken zijn zwart.Op dezelfde manier worden de prisma's die a^2c ; b^2a en c^2b gemaakt.

" Ik had het materiaal pas korte tijd in de groep," schrijft Mevrouw Steenberghe, " en terwijl ik er tijd voor nodig had om te leren ze correct in elkaar te zetten, deden de kinderen dat al heel snel."

Door de stukken te sorteren op gelijkheid , werden de kinderen opnieuw getroffen door de harmonie:

$$a^3 + a^2b + a^2b + a^2b \ (3a^2b) + ab^2 + ab^2 + ab^2 \ (3ab^2) + b^3$$

Elk stuk en combinatie van stukken van zowel de tweeterm als de drieterm werden weer op de juiste schaal op ruitjespapier getekend. Vooral de stukken die 6abc voorstelden in de drieterm waren interessant.

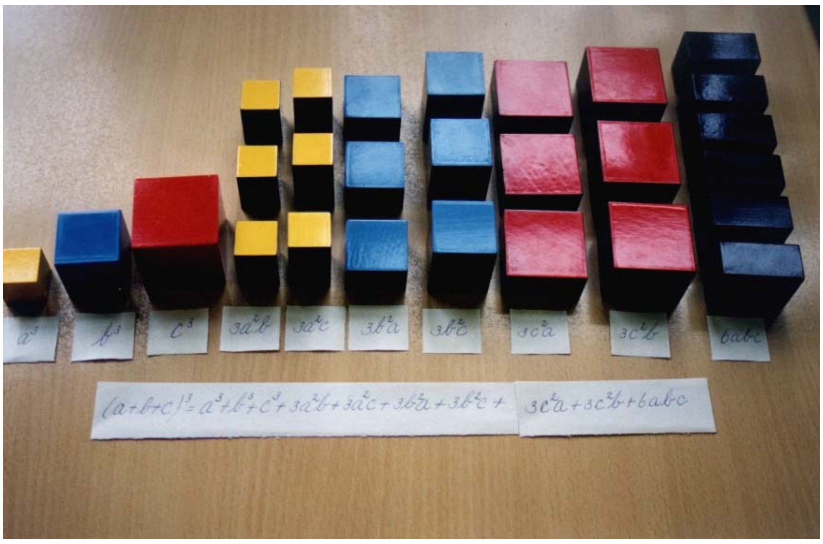
De kinderen ondernamen nog en andere activiteit. Bij elk stuk werd een kaartje gelegd met de formule van dat stuk erop. Dit bracht een aantal kinderen ertoe om de termen van de formule $(a + b + c + d)^2$ uit te schrijven en vervol-

[1] Tegenwoordig zijn de machten van 2 en 3 als materiaal verkrijgbaar.

gens dezelfde formule voor de derde macht, de vierde macht en de vijfde macht. En tenslotte – en wie kinderen kent zal dat niet verbazen – werden de formules van het vierkant en de kubus uitgeschreven met alle letters van het alfabet als termen.

Dit werk kostte een grote hoeveelheid papier. Toen de blaadjes aan elkaar geplakt werden van de derde macht van het hele alfabet ontstond er een strook van meer dan tien meter lang.

“Hoewel de hoeveelheid papier die verbruikt was enorm groot was,” schrijft Mevrouw Steenberghe, “was het geluk dat met het verrichten van de werkzaamheden gepaard ging evenredig groot, als het al niet het kwadraat of de derde macht ervan was.”



“De enige hulp die de leidster gaf bestond uit het geven van lesjes met het materiaal en uitleg van de betekenis, in sommige gevallen de uitkomsten van berekeningen controleren en aanwijzingen geven over hoe het papier spaarzamer gebruikt kon worden.”

“Op de een of andere manier raakte de helft van de groep betrokken bij het werk. Er was een enorme belangstelling ook van de kant van de kinderen die niet aan de werkzaamheden meededen. En van de leidsters en leiders van de andere groepen die af en toe naar de groep kwamen om naar de werkzaamheden te kijken.”

Het werk werd gedaan in een bovenbouwgroep met 9 – 12 jarige kinderen. En is rekenen nu zo akelig als soms gedacht wordt? Dat is duidelijk niet het geval. De kinderen bewezen de uitspraak van Dr. Montessori opnieuw die luidt: “De mens is uitgerust met een mathematische geest.” En ze zou dit niet gezegd hebben als ze niet op verschillende plaatsen op de wereld soortgelijke reacties had waargenomen.